研究简讯

一类随机算子方程的随机解*

朱传喜

南昌大学数学系，南昌 330047

摘要 研究了一类随机算子方程的随机解，进一步推广了非线性泛函分析中重要的Rothe定理，Petryshyn定理和Altman定理．利用所推广的定理证明了一个随机非线性方程随机解的存在性，也给出了在随机非线性方程组方面的应用．

关键词 随机不动点指数 随机算子方程 随机非线性方程 随机解 随机不动点

设 E 是一个可分的实Banach空间，(E, B)是一个可测空间，B 是由 E 中开集所生成的 σ-代数，设(Ω, u, γ)是一个完全的概率测度空间，其中 u 是 Ω 的子集所产生的集类，且 $\gamma(\Omega)=1$．另外，设 X 是 E 中的一个凸闭集，D 是 X 中的有界凸开集，∂D 是 D 在 X 中的边界，$X\subset E$，且 $\theta\in D$(这里及以后，θ 为零元)．

一个随机连续有界算子 A：$\Omega\times\overline{D}\rightarrow E$ 称为 E-值随机半闭1-集压缩算子，是指：对几乎所有 $\omega\in\Omega$，若 $A(\omega, \circ)$，是 $\overline{D}$ 上的半闭1-集压缩算子，且对任意的 $x\in\overline{D}$，$A(\omega, \circ)$：$\Omega\rightarrow E$ 是 E 值随机算子．本文有关概念参见文献[1～10]．

我们在文献[1]中曾证明了如下结论．

引理1 设 X 是 E 中闭凸集，D 是 X 中的有界凸开集，且 $\theta\in D$．假设 A：$\Omega\times\overline{D}\rightarrow X$ 是随机半闭1-集压缩算子，同时使得

$$x\neq\frac{t}{\mu}A(\omega, x)a\circ s, \forall(\omega, x)\in\Omega\times\partial D.$$

其中 $t\in(0, 1]$，$\mu\geqslant 1$．则随机算子方程 $A(\omega, x)=\mu x(\forall(\omega, x)\in\Omega\times\overline{D}, \mu\geqslant 1)$在 D 中必有随机解．

1 主要结果

利用上述结论，可以证明如下定理：

定理1 设 A：$\Omega\times\overline{D}\rightarrow X$ 是随机半闭1-集压缩算子，$\theta\in D$，且满足下述条件(Y_1)．(Y_1)：$\|A(\omega, x)\|\leqslant\|\mu x-\delta A(\omega, x)\|$，$\forall(\omega, x)\in\Omega\times\partial D$，$\mu\geqslant 1$，$0\leqslant\delta\leqslant 1$，其中 δ 为常数．则随机算子方程 $A(\omega, x)=\mu x(\mu\geqslant 1, \forall(\omega, x)\in\Omega\times\partial D)$在 $\overline{D}$ 中必有随机解．

证明 可以假设 $A(\omega, x)=\mu x$ 在 ∂D 上没有任何随机解(否则，定理结论自然成立)．于是，$A(\omega, x)\neq\mu x\ a\circ s$，$\forall(\omega, x)\in\Omega\times\partial D$，$\mu\geqslant 1$，此即

$$x\neq\frac{1}{\mu}A(\omega, x)\ a\circ s. \quad (1)$$

下面证明：

$$x\neq\frac{t}{\mu}A(\omega, x), \forall(\omega, x)\in\Omega\times\partial D, \quad (2)$$

$$\mu\geqslant 1 \text{且} t\in(0, 1).$$

假设(2)式不真，则存在一个 $t_0\in(0, 1)$，

2003-10-13收稿，2004-03-17收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号：19061003)和江西省自然科学基金(批准号：0011022)资助项目

E-mail：Zhu.chuanxi@263.net

$\omega_0\in\Omega$ 和 $x_0\in\partial D$，使得 $x_0=\frac{t_0}{\mu}A(\omega_0,\ x_0)$，从而 $A(\omega_0,\ x_0)=\frac{\mu}{t_0}x_0$. 将此式代入条件($Y_1$)可得：

$$\left\|\frac{\mu}{t_0}x_0\right\|\leqslant\left\|\mu x_0-\delta\frac{\mu}{t_0}x_0\right\|,$$

亦即

$$\frac{1}{t_0}\|\mu x_0\|\leqslant\left\|\left(1-\frac{\delta}{t_0}\right)\mu x_0\right\|. \tag{3}$$

因为 $x_0\in\partial D$，必有 $x_0\neq\theta$，又 $\mu\geqslant1$，从而也必有 $\mu x_0\neq\theta$，即 $\|\mu x_0\|\neq0$. 于是由(3)式得

$$\frac{1}{t_0}\leqslant\left|1-\frac{\delta}{t_0}\right|,$$

即 $1\leqslant|t_0-\delta|$. 这推出 $t_0-\delta\geqslant1$ 或 $t_0-\delta\leqslant-1$，亦即 $t_0\geqslant1+\delta$ 或 $t_0\leqslant\delta-1\leqslant1-1=0$. 这明显矛盾于 $t_0\in(0,\ 1)$.

所以

$$x\neq\frac{t}{\mu}A(\omega,x),\ \forall(\omega,x)\in\Omega\times\partial D, \tag{4}$$

这里 $t\in(0,\ 1)$，$\mu\geqslant1$. 由(1)与(4)式得

$$x\neq\frac{t}{\mu}A(\omega,x)\ a\circ s,\ \forall(\omega,x)\in\Omega\times\partial D, \tag{5}$$

其中 $\mu\geqslant1$ 且 $t\in(0,\ 1]$.

现应用引理1推知：随机算子方程 $A(\omega,\ x)=\mu x$ ($\mu\geqslant1$，$\forall(\omega,\ x)\in\Omega\times\overline{D}$)在 D 中必有随机解. 证毕.

注1　在定理1中，如取 $\mu=1$，$\delta=0$ 且 $A(\omega,\ x)$为确定型算子，则定理结论退化为文献[2]中 Rothe 定理；如取 $\mu=1$，$\delta=1$ 且 $A(\omega,\ x)$为确定型算子，则退化为文献[2]中 Petryshyn 定理.

定理2　设 A：$\Omega\times\overline{D}\to E$ 是随机半闭1-集压缩算子，$\theta\in D$，且满足下述条件(Y_2).

$$(Y_2):\ \|A(\omega,x)-(1-\delta)\mu x\|^{m+\delta}\geqslant\|A(\omega,x)+\delta\mu x\|^{m}\|A(\omega,x)+(1+\delta)\mu x\|^{\delta}-\|\mu x\|^{m+\delta},$$

对任何$(\omega,\ x)\in\Omega\times\partial D$，其中 $\mu\geqslant1$，$m\geqslant0$，$\delta\geqslant0$，使 $m+\delta>1$. 则随机算子方程 $A(\omega,\ x)=\mu x$ 在 $\overline{D}$ 中必有随机解.

证明　可以假设 $A(\omega,\ x)=\mu x$ 在 ∂D 上没有任何随机解(否则，定理已获证明)，从而，$A(\omega,\ x)\neq\mu x$，$a\circ s$，$\forall(\omega,\ x)\in\Omega\times\partial D$ 和任何 $\mu\geqslant1$，此即

$$x\neq\frac{1}{\mu}A(\omega,x)a\circ s. \tag{6}$$

下面证明：

$$x\neq\frac{t}{\mu}A(\omega,x),\ \forall(\omega,x)\in\Omega\times\partial D,\quad \mu\geqslant1\text{ 且 }t\in(0,1). \tag{7}$$

假设(7)式不真，则存在一个 $t_0\in(0,\ 1)$，$\omega_0\in\Omega$ 和 $x_0\in\partial D$，使 $x_0=\frac{t_0}{\mu}A(\omega_0,\ x_0)$. 于是，$A(\omega_0,\ x_0)=\frac{\mu}{t_0}x_0$，把该式代入条件($Y_2$)式得

$$\left\|\frac{\mu}{t_0}x_0-(1-\delta)\mu x_0\right\|^{m+\delta}\geqslant\left\|\frac{\mu}{t_0}x_0+\delta\mu x_0\right\|^{m}\cdot\left\|\frac{\mu}{t_0}x_0+(1+\delta)\mu x_0\right\|^{\delta}-\|\mu x_0\|^{m+\delta}, \tag{8}$$

其中 $m\geqslant0$，$\delta\geqslant0$ 使 $m+\delta>1$，$x_0\in\partial D$，$\mu\geqslant1$ 且 $t_0\in(0,\ 1)$.

由于 $x_0\in\partial D$，$\mu\geqslant1$，可以推知 $\|\mu x_0\|\neq0$，根据(8)式推得

$$\left(\frac{1}{t_0}+\delta-1\right)^{m+\delta}\geqslant\left(\frac{1}{t_0}+\delta\right)^{m}\left(\frac{1}{t_0}+\delta+1\right)^{\delta}-1. \tag{9}$$

记 $y=\frac{1}{t_0}+\delta$，则 $y>1$ 且(9)式可写为

$$(y-1)^{m+\delta}\geqslant y^{m}(y+1)^{\delta}-1. \tag{10}$$

可以断言必有

$$(y-1)^{m+\delta}<y^{m}(y+1)^{\delta}-1. \tag{11}$$

从而与(10)式产生直接矛盾.

事实上，令 $f(y)=y^{m+\delta}-1-(y-1)^{m+\delta}$，其中 $m\geqslant 0$，$\delta\geqslant 0$，使满足 $m+\delta>1$. 则易求出

$$
\begin{aligned}
f'(y)&=(m+\delta)y^{m+\delta-1}-(m+\delta)(y-1)^{m+\delta-1}\\
&=(m+\delta)[y^{m+\delta-1}-(y-1)^{m+\delta-1}]>0 .
\end{aligned}
$$

(因为当 $y>1$ 时，$y>y-1>0$，从而有：$y^{m+\delta-1}>(y-1)^{m+\delta-1}$). 因此 $f(y)$ 是 $[1,+\infty)$ 内的严格单调增加函数. 于是，当 $y>1$ 时，有 $f(y)>f(1)$，即 $y^{m+\delta}-1>(y-1)^{m+\delta}$，从而：$(y-1)^{m+\delta}<y^{m+\delta}-1\leqslant y^m(y+1)^{\delta}-1$，即(11)式成立.

上述推证说明必有(7)式成立，于是应用引理1推得

$A(\omega,x)=\mu x$ 在 D 中必有随机解. 证毕.

注2 在定理2中，如取 $\delta=0$，$m=2$，$A(\omega,x)$ 为确定型算子，则可得文献[2]中相应的 Altman 定理，它也推广了文献[2]中的 Rothe 定理和 Petryshyn 定理，所以定理2推广了 Altman 定理.

用与定理2相同的证明方法可证明下面定理3.

定理3 设 $A:\Omega\times\overline{D}\to E$ 是随机半闭1-集压缩算子，$\theta\in D$，且满足下述条件(Y_3).

$$
(Y_3):\ \|A(\omega,x)-(1-\delta)\mu x\|^{m+\beta}\geqslant \|A(\omega,x)+\delta\mu x\|^{m}\cdot \|A(\omega,x)+(1+\delta)\mu x\|^{\beta}-\|\mu x\|^{m+\beta},
$$

其中 $\forall(\omega,x)\in\Omega\times\partial D$，$\mu\geqslant 1$，$m\geqslant 0$，$\delta\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 使 $m+\beta>1$. 则随机算子方程 $A(\omega,x)=\mu x$ 在 $\overline{D}$ 中必有随机解.

2 定理的应用

以下应用上述所获得的定理证明两种随机方程解的存在性.

例1 考察随机非线性方程组

$$
\begin{cases}
\sin(x+y+\omega)-2x=0\\
\cos(x-y+\omega)-3y=0
\end{cases},\tag{12}
$$

其中 $\omega\in[0,1]=\Omega$，$(x,y)\in D$，$D=\{(x,y)\mid |x|<\pi,\ |y|<\pi\}$.

可以断言上述方程组在 D 中必有随机解. 事实上，因为 $D\subset R^2$，可以考察赋予极大范数 $\|v\|=\max\{|x|,|y|\}$ ($\forall v=(x,y)\in \mathrm{R}^2$) 的 Banach 空间 R^2.

显然 $\partial D=\{(x,y)\mid x=\pm\pi,\ -\pi\leqslant y\leqslant\pi\}\cup\{(x,y)\mid y=\pm\pi,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$. 对任何 $Z=(x,y)\in\overline{D}$，定义

$$
A(\omega,Z)=\left(\frac{1}{2}\sin(x+y+\omega),\frac{1}{3}\cos(x-y+\omega)\right).
$$

则容易验证 $A:\Omega\times\overline{D}\to R^2$ 是一个随机半闭1-集压缩算子. D 的边界可分解为 $\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2\cup\partial D_3\cup\partial D_4$，其中

$$
\begin{aligned}
\partial D_1&=\{(x,y)\mid x=-\pi,-\pi\leqslant y\leqslant\pi\};\\
\partial D_2&=\{(x,y)\mid x=\pi,-\pi\leqslant y\leqslant\pi\};\\
\partial D_3&=\{(x,y)\mid y=-\pi,-\pi\leqslant x\leqslant\pi\};\\
\partial D_4&=\{(x,y)\mid y=\pi,-\pi\leqslant x\leqslant\pi\}.
\end{aligned}
$$

以下验证：对任何属于上述边界区域之一，必有定理1的条件(Y_1)（(Y_1)中取 $\mu=1$，$\delta=0$）满足.

(1°) $\forall Z\in\partial D_1$，则有

$$
\begin{aligned}
\|A(\omega,Z)\|&=\left\|\left(\frac{1}{2}\sin(-\pi+y+\omega),\frac{1}{3}\cos(-\pi-y+\omega)\right)\right\|\\
&=\max\left\{\left|\frac{1}{2}\sin(-\pi+y+\omega)\right|,\left|\frac{1}{3}\cos(-\pi-y+\omega)\right|\right\}\\
&=\max\left\{\left|-\frac{1}{2}\sin(y+\omega)\right|,\left|-\frac{1}{3}\cos(y-\omega)\right|\right\}\\
&=\max\left\{\left|\frac{1}{2}\sin(y+\omega)\right|,\left|\frac{1}{3}\cos(y-\omega)\right|\right\}\leqslant\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

而 $\|Z\|=\max\{|-\pi|,|y|\}=\pi$，(因为 $-\pi\leqslant y\leqslant\pi$)，从而 $\|A(\omega,Z)\|<\|Z\|$，(Y_1)满足.

(2°) $\forall Z \in \partial D_2$，则有

$$\begin{aligned}\| A(\omega, Z) \| &= \left\| \left(\frac{1}{2}\sin(\pi + y + \omega), \frac{1}{3}\cos(\pi - y + \omega) \right) \right\| \\ &= \max\left\{ \left| \frac{1}{2}\sin(\pi + y + \omega) \right|, \left| \frac{1}{3}\cos(\pi - y + \omega) \right| \right\} \\ &= \max\left\{ \left| -\frac{1}{2}\sin(y + \omega) \right|, \left| -\frac{1}{3}\cos(y - \omega) \right| \right\} \\ &= \max\left\{ \left| \frac{1}{2}\sin(y + \omega) \right|, \left| \frac{1}{3}\cos(y - \omega) \right| \right\} \leqslant \frac{1}{2},\end{aligned}$$

而 $\| Z \| = \max\{\pi, |y|\} = \pi$，(因为 $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$)，从而 $\| A(\omega, Z) \| < \| Z \|$，同理，$(Y_1)$满足.

(3°) $\forall Z \in \partial D_3$，则有

$$\begin{aligned}\| A(\omega, Z) \| &= \left\| \left(\frac{1}{2}\sin(x - \pi + \omega), \frac{1}{3}\cos(x + \pi + \omega) \right) \right\| \\ &= \max\left\{ \left| \frac{1}{2}\sin(x - \pi + \omega) \right|, \left| \frac{1}{3}\cos(x + \pi + \omega) \right| \right\} \\ &= \max\left\{ \left| -\frac{1}{2}\sin(x + \omega) \right|, \left| -\frac{1}{3}\cos(x + \omega) \right| \right\} \\ &= \max\left\{ \left| \frac{1}{2}\sin(x + \omega) \right|, \left| \frac{1}{3}\cos(x + \omega) \right| \right\} \leqslant \frac{1}{2},\end{aligned}$$

而 $\| Z \| = \max\{|-\pi|, |x|\} = \pi$，(因为 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$)，所以 $\| A(\omega, Z) \| < \| Z \|$ 且(Y_1)满足.

(4°) $\forall Z \in \partial D_4$，则有

$$\begin{aligned}\| A(\omega, Z) \| &= \left\| \left(\frac{1}{2}\sin(x + \pi + \omega), \frac{1}{3}\cos(x - \pi + \omega) \right) \right\| \\ &= \max\left\{ \left| \frac{1}{2}\sin(x + \pi + \omega) \right|, \left| \frac{1}{3}\cos(x - \pi + \omega) \right| \right\} \\ &= \max\left\{ \left| -\frac{1}{2}\sin(x + \omega) \right|, \left| -\frac{1}{3}\cos(x + \omega) \right| \right\} \\ &= \max\left\{ \left| \frac{1}{2}\sin(x + \omega) \right|, \left| \frac{1}{3}\cos(x + \omega) \right| \right\} \leqslant \frac{1}{2},\end{aligned}$$

而 $\| Z \| = \pi$. 因此，$\| A(\omega, Z) \| < \| Z \|$，条件$(Y_1)$成立.

根据定理 1，推得随机算子方程 $A(\omega, Z) = Z$ 在 D 中必有随机解，即存在$(x, y) \in \mathrm{R}^2$使

$$\left(\frac{1}{2}\sin(x + y + \omega), \frac{1}{3}\cos(x - y + \omega) \right) = (x, y),$$

此即方程组(12)在 D 中必有随机解.

例 2　考察随机非线性方程

$$\sin(x + 3\omega) + \frac{1}{2}\sin(x + \omega) - 2x = 0,$$
$$\omega \in [0, 1] = \Omega.$$

以下说明该方程在$[-\pi, \pi]$中必有随机解.

事实上，令 $A(\omega, x) = \frac{1}{2}\sin(x + 3\omega) + \frac{1}{4}\sin(x + \omega)$，其中 $\omega \in [0, 1] = \Omega$，$x \in [-\pi, \pi]$. 则显然 $A(\omega, x)$是一个随机半闭 1-集压缩算子. 容易验证在区间端点处有：$\| A(\omega, -\pi) \| < \| -\pi \| = \pi$，$\| A(\omega, \pi) \| < \| \pi \| = \pi$，从而满足定理 1 的条件$(Y_1)$($(Y_1)$中取 $\mu = 1$，$\delta = 0$)，于是由定理 1 推知：$A(\omega, x) = x$ 在$[-\pi, \pi]$中必有随机解，即

$$\frac{1}{2}\sin(x + 3\omega) + \frac{1}{4}\sin(x + \omega) = x,$$

在$[-\pi, \pi]$中有随机解，亦即

$$\sin(x+3\omega)+\frac{1}{2}\sin(x+\omega)-2x=0,$$

在$[-\pi, \pi]$中必有随机解.

参 考 文 献

1 朱传喜. 随机1-集压缩型算子方程的几个定理. 数学进展, 1998, 27(5): 464
2 朱传喜. 随机半闭1-集压缩算子的几个定理. 数学学报, 1999, 42(3): 501
3 王梓坤. 随机泛函分析引论. 数学进展, 1962, 5(1): 45
4 张石生. 不动点理论及其应用. 重庆: 重庆出版社, 1984
5 Li G Z. On random fixed point index and some random fixed point theorems of random 1-set-contractive operator. ACTA Mathematicae Applicatae Sinica, 1996, 19(2): 203
6 朱传喜. 关于随机算子方程的随机解. 数学进展, 1997, 26(5): 429
7 Zhu C X. Some new fixed point theorems in probabilistic metric spaces. Appl Math and Mech, 1995, 16(2): 179
8 Zhu C X. Some theorems in the X-M-PN space. Appl Math and Mech, 2000, 21(2): 181
9 Li G Z. The fixed point index and the fixed point theorems of 1-set-contractive mappings. Proc Amer Math Soc, 1988, 104(4): 1163
10 Amann H. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces. J Funct Anal, 1972, 11(2): 346

临床医学**1993—2003**年被引频率位列前**20**位的期刊

排序	期刊名称	论文数	总被引	平均被引
1	Nature	665	186462	280.39
2	Science	769	212467	276.29
3	N Engl J Med	4321	478994	110.85
4	Nature Med	1487	139814	94.02
5	Proc Nat Acad Sci USA	4112	311329	75.71
6	J Exp Med	4533	329642	72.72
7	J Clin Invest	5979	341697	57.15
8	J Nat Cancer Inst	1850	99170	53.61
9	JAMA-J Am Med Assn	5155	253573	49.19
10	Ann Intern Med	2435	113903	46.78
11	Lancet	7777	330386	42.48
12	Circ Res	3168	121569	38.37
13	Cancer Res	11630	443009	38.09
14	Gastroenterology	3950	147118	37.25
15	Circulation	9862	367103	37.22
16	J Clin Oncol	4950	173007	34.95
17	Blood	11990	409399	34.15
18	Amer J Pathol	4367	130043	29.78
19	Diabetes	3686	104086	28.24
20	Hepatology	4478	122075	27.26

(摘自《英语科技论文撰写与投稿》)